1. **Вычислительный эксперимент. Численные методы.**

Вычислительный эксперимент — метод изучения устройств или физических процессов с помощью математического моделирования. Он предполагает, что вслед за построением математической модели проводится ее численное исследование, позволяющее «проиграть» поведение исследуемого объекта в различных условиях или в различных модификациях.

Численное исследование модели дает возможность определять разнообразные характеристики процессов, оптимизировать конструкции или режимы функционирования проектируемых устройств. Более того, случается, что в ходе вычислительного эксперимента исследователь неожиданно открывает новые процессы и свойства, о которых ему ранее ничего не было известно. Численные методы линейной алгебры — это пересечение вычислительной математики и линейной алгебры. Целью дисциплины является разработка и анализ алгоритмов для численного решения матричных задач. Наиболее важными задачами являются решение систем линейных алгебраических уравнений и вычисление собственных значений.

**3.Источники погрешностей.**

Погрешность решения задачи обуславливается следующими причинами:

1)математическое описание задачи является неточным, т.к. при описании модели всегда присутствуют определенные ограниче-ния;

2)неточность задания исходных данных модели. Исходные данные чаще всего известны приближенно, что связано с неточностью измерения числовых параметров различными приборами;

3) метод, применяемый для решения задачи, как правило, является приближенным. Получение точного решения исходной математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, поэтому вместо точного решения задачи приходится прибегать к приближенному;

4) действия над приближенными числами, а также обязатель-ное округление, связанное с двоичным представлением чисел и конечностью разрядной сетки ЭВМ, вносят дополнительную погрешность.

**4.Абсолютная и относительная погрешности.**

Пусть X – точное значение некоторой величины, а х – наилучшее из известных приближений. В этом случае ошибка (или погрешность) приближения х определяется разностью Х – х. .

По абсолютной погрешности нельзя в полной мере судить о точности измерений или вычислений. Качество приближения измеряется с помощью относительной погрешности, которая определяется как отношение ошибки к модулю значения X (когда оно неизвестно, то к модулю приближения х). .

**5.Правильная запись и округление чисел.**

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Цифра числа называется верной (в широком смысле), если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Цифра числа называется верной (в строгом смысле), если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

При округлении соблюдают следующие правила.

• Если первая из отброшенных цифр больше 5, то к послед-ней оставшейся цифре прибавляется единица.

• Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения.

• Если первая из отброшенных цифр равна 5, а среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица.

• Если первая из отброшенных цифр равна 5 и остальные отброшенные цифры нулевые, то последняя оставшаяся цифра не изменяется, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Во многих практических задачах пользуются упрощёнными правилами округления, согласно которым цифра, если за ней стоят цифры 0, 1, 2, 3, 4, при округлении не изменяется и увеличивается на 1 в противоположном случае.

**6(7). Решение систем линейных алгебраических уравнений. Устойчивость СЛАУ.**

Линейная неоднородная задача для систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) записывается в виде

*АХ = f* или ,

Если определитель матрицы системы равен нулю, то система уравнений либо не имеет решения, либо имеет их бесчисленное множество.

Если определитель матрицы близок к нулю ( ), то небольшие погрешности исходных данных могут привести к большим погрешностям в решении.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на две большие группы: прямые и итерационные.

Под прямыми (точными) понимаются такие методы, которые позволяют в предположении отсутствия округлений получить точные значения неизвестных как результат выполнения конечного числа арифметических операций.

**8. Прямые методы решения СЛАУ. Теорема об LU разложении.**

Пусть *L* – нижняя треугольная матрица с единичной диагональю, а *U* – верхняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами. Значения элементов матрицы *L* и *U* находятся по рекуррентным соотношениям:

, , (1) LU-разложение, полученное по формулам (1), применяется для построения LDU-разложения.

LU-разложение является модификациеё метода Гаусса.

Основная идея метода Гаусса с выбором главного элемента состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю.

Суть метода Жордана-Гаусса состоит в том, чтобы привести матрицу А к единичному виду, тогда вектор решения будет совпа-дать со столбцом свободных членов. Алгоритмически метод Жордана-Гаусса объединяет прямой и обратный ход метода Гаусса .(исключаем переменные не только снизу, но и сверху)

**11. Прямые методы решения СЛАУ. Метод квадратного корня.**

Если матрица *А* является симметричной и положительно определенной, то ее можно представить в виде произведения , *S* – верхняя треугольная матрица, *ST* – транспонированная к ней матрица (нижняя треугольная).

Значения коэффициентов матрицы *S* находятся по формулам.

В этом случае решение системы линейных алгебраических уравнений (1) сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами: (3) *SX = Y*.(4)

Т.к. матрица  системы (3) является нижней треугольной, то можно сразу выписать ее решение:

(5)  *i = 2, 3, …, n*. (6)

Определив таким образом вектор *Y*, можем найти из системы (4) искомое решение. Это решение находим обратным ходом метода Гаусса, т.к. матрица *S* **–** верхняя треугольная.Имеем:

****, (7)  *i = n-1, n-2, …, 1*.(8)

**12. Прямые методы решения СЛАУ. Метод прогонки решения СЛАУ.**

Этот метод применим в случае, когда матрица системы является трехдиагональной.



Решение системы будем искать в виде [4; 18]

, (2)

где  − прогоночные коэффициенты.

Для их определения выразим из первого уравнения системы (1) *х*1 через *х*2, получим:

, (3) откуда. (4)

Из второго уравнения системы (1) с помощью (3) выразим  через , получим:

, откуда .

Продолжая этот процесс, получим из *i*-го уравнения системы (1)

, *i = 1, 2, …, n–1.* (6) следовательно = , = , *i = 2, …, n*

Обратный ход прогонки состоит в нахождении неизвестных ******

**13. Прямые методы решения СЛАУ. Вычисление определителей.**

Для вычисления определителей матриц можно применять алгоритмы прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений 

Преобразования прямого хода в методе Гаусса, приводящие матрицу *А* системы к треугольному виду таковы, что они не изменяют определителя матрицы *А*. Учитывая, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, имеем.



**14. Прямые методы решения СЛАУ. Обращение матрицы.**

Пусть *А* – невырожденная матрица *n*-го порядка. Нахождение матрицы, обратной данной матрице *А*, эквивалентно решению матричного уравнения: *АХ = Е,*

где  – искомая матрица.

Методом Жордано:

-дорисовать к исходной матрицу единичную

-привести исходную матрицу к еденичной, тогда из матрица справа получится обратная исходной

**15. Общая характеристика итерационных методов решения СЛАУ.**

***Метод итерации*** — это численный и приближенный метод решения СЛАУ.

***Суть:*** нахождение по приближённому значению величины следующего приближения, которое является более точным. Метод позволяет получить значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов (итерационный процесс). Характер сходимости и сам факт сходимости метода зависит от выбора начального приближения корня x0x0.

**19. Метод минимальных невязок**

Этот итерационный метод определяется следующим образом. Пусть

 как и ранее,  Итерационный параметр τ*k* на каждой итерации выбирается так, чтобы минимизировать, евклидову норму невязки . Заметим, что итерационный процесс  может быть представлен в равносильном виде в терминах невязки . Тогда для квадрата евклидовой (третьей) нормы невязки получаем условие

Для отыскания минимума невязки на следующей итерации приравняем нулю производную последнего выражения по итерационному параметру τ*k*. Получим равенство

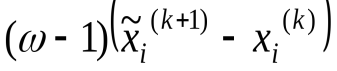
.

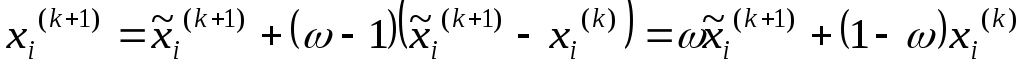
Из последнего соотношения находим значение итерационного параметра 

**18. Метод релаксации**

Метод последовательной верхней релаксации является одним из наиболее эффективных и широко используемых итерационных методов для решения СЛАУ с симметрическими положительно определенными матрицами. После вычисления https://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-OYh6pL.png-й компонентыhttps://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-6Y2Hv3.png-го приближения по методу Гаусса-Зейделя

https://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-SnHRPX.png

производят дополнительное смещение этой компоненты на величину , где https://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-9qeqdB.png- параметр релаксации. Тогда



При https://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-ocieEO.pngметод релаксации совпадает с методом Гаусса-Зейделя, при https://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-YZWcGa.png- называют методом последовательной верхней релаксации, а при https://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-0YtIaZ.png- нижней. Но часто для любых https://studfiles.net/html/2706/58/html_n0leaAnvDx.6AKY/img-6d71Eo.png- методом последовательной верхней релаксации.

**21. Итерационные методы вариационного типа. Метод скорейшего спуска.**

Пусть имеем систему (1) с симметричной положительно определенной матрицей *А*. Обозначим через

 (3)

невязку, которая получается при подстановке приближенного значения *X(k)*, полученного на *k*-й итерации, в уравнение (1).

Рассмотрим явный нестационарный итерационный метод [20]

. (4)

Перепишем метод (4) с учетом равенства (3), имеем

.

вычисление  можно проводить по формуле

.

**22. Численное решение задач на собственные значения. Постановка задачи.**

Пусть *А* − действительная числовая квадратная матрица размера (*n\*n*). Ненулевой вектор , удовлетворяющий условию , (1)

называется собственным вектором матрицы *А*.

Число λ в равенстве (1) называется собственным значением. Говорят, что собственный вектор *X* соответствует (принадлежит) собственному значению λ.

Равенство (1) равносильно однородной относительно *X* системе:. (2)

Система (2) имеет ненулевое решение для вектора *X* (при известном λ) при условии . Это равенство есть характеристическое уравнение:

, (3) где  − характеристический многочлен *n*-й степени.

Корни  характеристического уравнения (3) являются собственными (характеристическими) значениями матрицы *А*, а соответствующие каждому собственному значению , ненулевые векторы , удовлетворяющие системе

 или ,являются собственными векторами.

Множество всех собственных значений матрицы А называется спектром матрицы А.

**23. Численное решение задач на собственные значения. Метод Данилевского.**

. (1)

Характеристический полином матрицы Ф можно записать в виде

Возьмем единичную матрицу, размерность которой соответствует размерности матрицы *А*.

В единичной матрице *n*–*1* строка заменяется строкой, сформированной из элементов *n*-ой строки матрицы *А*, взятых с противоположным знаком, после их деления на элемент . Только элемент *n*–*1* столбца формируется по-иному. В эту позицию выставляется элемент, обратный элементу .

Получим матрицу

.

Умножение матрицы *А* справа на матрицу  дает матрицу , в которой последняя строка принимает нужный вид, т.е. совпадает с последней строкой матрицы Фробениуса. Затем полученную матрицу умножим слева на матрицу  (обратную), которая существует, так как , т.е в единичной матрице *(n*–*1)-*строка заменяется *n*-строкой исходной матрицы *А*.

.

**24. Итерационный метод нахождения максимальных по модулю вещественных собственных значений матрицы.**

Пусть – ее собственные значения, а  – собственные вектора, соответствующие этим собственным значениям, т.е.

.

Выберем некоторый вектор  в качестве начального итерационного приближения и рассмотрим следующую последовательность векторов:

 Построим итерационную последовательность

Эта последовательность сходится к исходному собствен значению  при *k* → ∞ и любом *i=1, 2, …, n*.Таким образом, для нахождения  с точностью  нужно выбрать любой номер *i* и построить итерационную последовательность (9), заканчивая итерации по условию .